* **P207-208：2,3,12**
* **P212：1,6,8**
* **P216: 5**
* **P224-225: 7,8,10,11**

**P207-208：2,3,12**

2.指出下列关系是否为A到B的函数：

(1),

不是函数，因为R的定义域不等于前域

(2)

是函数

(3)

是函数

(4)

不是函数，因为S的定义域不等于前域A

3.设,求证：

(1)为到的函数当且仅当f=g.

**证明：**

必要性：，显然成立

充分性：(反证法)，若为到的函数，，

那么，使得,并且或者,并且，

于是，

这与为*X*到*Y*的函数矛盾。

因此，。。。。。

(2)为到的函数当且仅当f=g.

**证明：**

必要性：，显然成立

充分性：(反证法)，

若*为*到的函数，，那么有*,*，使得，，因此，并且。

这与为X到Y的函数矛盾。故

因此，。。。。。

12.考虑下列实数集上的函数：

课件：

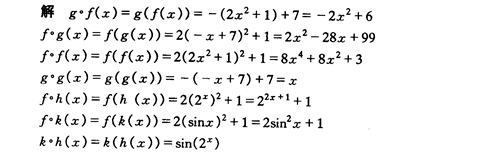
**，表示集合X先到*f*然后到*g，*得到一个映射，表达式优先级产生歧义**

**看成是的写法的缩写，先f(x)后g(x)**

***的结果***

**复合函数规则适用**

***，有些教材采用这种写法***



-------------------------------------------------------------------------------

**P212：1,6,8**

1. 设为有限集合。
2. 若,f可能是满射吗

不可能，依题意 与满射,矛盾

1. 若,f可能是满射吗

不可能，鸽笼原理，为单射，必有

1. 若,可能是单射吗？可能是满射吗

，恒为单射；*，*为满射

1. 与满足什么条件时，f可能是满射？单射？双射？

时，可能为满射；，可能为单射，为双射

1. 思考(4)给出的条件，在为无限集时还适用吗？

满足充分性，必要性不一定

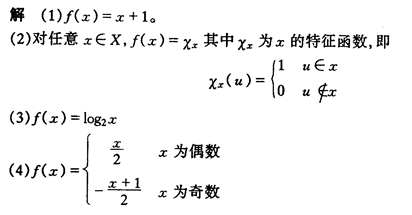
6.对下列每对集合，构造一个到的双射函数

(1),

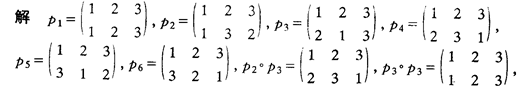
(2)

(3)

(4)



8.设，做出全部A上的置换，并以三个函数值组成的字的字典排序这些置换。试着计算,并求,使得





**P216: 5**

**置换的逆函数称为逆置换。请给出一个由已知置换求其逆置换的简明算法**

1. **置换 ，逆置换**
2. **原本的定义域变成值域，值域变定义域，两行的位置颠倒，依此原理：**

**将原来的矩阵的两行倒置，此时第一行没有顺序，然后再次排序即可**

**例如：**

**倒置，重排序**

**P224-225: 7, 8, 10, 11**

**7，为满射**

1. **A为无限集，B是否一定为无限集（否）**
2. **A为可数集，B是否一定为可数集（是）**

**8,为单射**

**（1）A为无限集，B是否一定为无限集（是）**

**（2）A为可数集，B是否一定为可数集（不一定）**

**10，证明A为无限集时，当且仅当对上的任意函数，恒有非空真子集，使得**

**证明：**

1. **充分性**

**不是无限集，令。取A上函数f，**

**对所有A的非空真子集，均不能成立，因此，当A上任意函数f，恒有非空。。。。**

1. **必要性**

**， ，若B为有限集，那么不对任意函数f成立（例如f=x+1对不上），那么B为无限集=>A为无限集**

**解答**

|  |
| --- |
| **证明：**  **必要性:构造一个集合B1如下：**  **任取b0∈A，令b1= f(b0)，b2= f(b1)，。。。；B1={ b0，b1，b2，。。。 }**  **因f是A上的任意函数，即f：A🡺A，所以B1A**  **若B1= A，令B={ b1，b2，。。。 }，否则，令B=B1**  **显然有B非空，且是A的真子集，且有**  **充分性:反证法，假定A有限，则非空真子集B也有限，不妨假设B=A-{a0}，则：**  **f(B)= f(A-{a0})= f(A)-{f(a0)}-------（1）**  **又因，不妨假设且**  **f(B)= B-{b0}= A-{a0}-{b0}----------（2）**  **因为B=A-{a0}，所以**  **故由（2）知：| f(B)|=|A|-2-------（3）**  **由于f是A上的任意函数，特别地，假设f是A上的双射函数，**  **由于A是有限的，所以 A= f(A)**  **所以，f(B)= f(A-{a0})= f(A)-{f(a0)}=A-{f(a0)}-------（4）**  **由（4）知：| f(B)|=|A|-1---------（5）**  **（3）（5）矛盾。**  **《证毕》** |

**11，设字母表证明** (א **希伯来文首字母**)

**思路**

**构造函数**

**根据对角法，可以构造一张映射表**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **a** | **aa** | **aaa** | **aaaa** | **aaaaa** | **…** |
|  |  | **a** | **aa** | **aaa** | **aaaa** | **aaaaa** |  |
| **b** | **b** | **ba** | **baa** | **baaa** | **baaaa** | **baaaaa** |  |
| **bb** | **bb** | **bba** | **bbaa** | **bbaaa** |  |  |  |
| **bbb** | **bbb** | **bbba** | **Bbbaa** | **…** |  |  |  |
| **bbbb** | **bbbb** | **bbbba** |  |  |  |  |  |
| **bbbbb** | **Bbbbb** | **bbbbba** |  |  |  |  |  |
| **…** |  |  |  |  |  |  |  |

**以此类推可以构造映射关系，那么对于无限集来说，将上述表格从左上角斜向排列即可得到，即势为**，**对于**

**另外一个思路：**

**同样如果将a和b看成0和1，那么可以写成由所有二进制数构成的集合，即**

**个数和自然数对上(此时的二进制只能表示1在0左边的情况)，那么在做一次变换f，将0和1置反便得到了另外一个集合，只需像自然数到偶数的映射一样，将原来所有的位置都乘以2，便可插入，这两个集合的势相同。**

**即**

答案过程如下

证明：令。为 的自反传递闭包。显然，为所有二进制数串及空串构成的集合。作映射。定义如下：对任意一个，若*X*为空串，则，否则

设，。其中，表示*n*个0组成的串，为自然数。当*n*=0时，*Xn*为空。*Y*2表示任意自然数*k*的二进制表达。*k*为与*Y*2等值的十进制数表达。下表描述了Σ1\*中的元素与正有理数集合∪{-1}中元素的对应关系。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 空串 | *Y*2 | 0 *Y*2 | 00 *Y*2 | 000 *Y*2 | … | 0…0 *Y*2 | … |
| *f*(*X*) | -1 | *k* | *k/*2 | *k/*3 | *k/*4 | … | *k/*(*n+*1) | … |

容易证明，*f*是一个双射。所以，集合与正有理数集合∪{-1}等势。我们知道，正有理数集合∪{-1}与自然数集合等势，所以，为可数集合。由于集合与集合是等势的，故集合也为可数集合。